

Übungsblatt 0

Abgabe bis **12.04.2014** in der Vorlesung.

Hinweis: Schreiben Sie unbedingt Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe!

1. Das Stellenwertsystem (H)

Zahlensysteme bestehen aus einem Alphabet (Ziffern) und einer Menge von Regeln wie Wörter (Zahlen) gebildet werden. Bei dem in Europa gängigen Stellenwertsystem werden Zahlen von links nach rechts mit den Koeffizienten der Zerlegung in eine Summe von Potenzen einer gewählten Basis, meist 10, aufgeschrieben. Die erste Ziffer ist demnach der Koeffizient der höchsten verwendeten Potenz und mit jeder weiteren Ziffer wird der Exponent um 1 verringert. Ein Komma (,) markiert den Vorzeichenwechsel des Exponenten. Wird kein Vorzeichenwechsel benötigt, so ist der Exponent des letzten Summanden, der Ziffer ganz rechts, stets 0. Die folgende Tabelle zeigt gängige Stellenwertzahlensysteme in der Informatik.

| Bezeichnung | Basis | Ziffern (→ aufsteigende Wertigkeit) | | | | | | | | | |
|------------------------|-------|-------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dezimalsystem | zehn | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Oktalsystem | acht | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| Dualsystem/Binärsystem | zwei | 0 | 1 | | | | | | | | |

Tabelle 1: Zahlensysteme werden häufig entsprechend der Mächtigkeit ihres Alphabets benannt.

Beim Arbeiten mit verschiedenen Zahlensystemen ist es wichtig stets sicherzustellen, dass klar ist mit welchem Zahlensystem eine Zahl dargestellt wird. Die allgemeine Notation ist die Zahl in runden Klammern und die Basis in Dezimalschreibweise als Index der abschließenden Klammer. Um zum Beispiel zu verdeutlichen, dass man das Dezimalsystem benutzt schreibt man $(7)_{10}$.

- (a) Welche Ziffern werden normalerweise für das Hexadezimalsystem verwendet? Schreiben Sie alle mit aufsteigender Wertigkeit auf!
- (b) Schreiben Sie die Zahlen 2, 4, 8, 10 je im Hexadezimalsystem, Oktalsystem und Binärsystem auf!
- (c) Konvertieren Sie die folgenden Zahlen je in das Binärsystem und das Hexadezimalsystem!
16, 127, 168, 172, 192, 255
- (d) Wieviele Stellen hat die Zahl $2^{32} - 1$ in Binärdarstellung? Wieviele davon sind 1 wieviele 0?

2. Von Netzen und Bäumen (H)

Ein Netz bzw. *Graph* besteht aus einer Menge von *Knoten* und *Kanten* zwischen zwei Knoten. Der *Grad* eines Knotens ist die Anzahl der Kanten die in ihm enden. Ein *Pfad* zwischen zwei Knoten ist eine Menge von Kanten und beschreibt einen Weg zwischen zwei Knoten.

Ein *Baum* ist ein Graph in dem es von jedem Knoten zu jedem Knoten einen Pfad gibt und man keine Kreise mit den vorhandenen Kanten bilden kann. Die Knoten eines Baumes mit Grad 1 heißen *Blatt*, alle anderen *innere Knoten*. Benutzt man Bäume um eine Struktur darzustellen, so wird meistens ein Knoten des Baums als *Wurzel* bezeichnet. Die Anzahl der Kanten im Pfad von einem Knoten zur Wurzel ist der *Abstand* des Knotens zur Wurzel. Die *Höhe* eines Baums ist der größte Abstand. Zwischen den Knoten spricht man von Verwandtschaftsbeziehungen: Von den beiden Knoten einer Kante ist der mit dem (um 1) längeren Pfad zur Wurzel ein *Nachfahre*, *Nachfolger* oder auch *Kind* des anderen Knotens. Der Knoten mit dem kürzeren Abstand heißt *Vorgänger*, *Vorfahre* oder auch *Vater*.

- (a) Zeichnen Sie einen vollvermaschten Graphen mit 4 Knoten!
- (b) Ein Baum mit insgesamt 4 Knoten kann vier verschiedene Formen haben. Eine mit Höhe 3, zwei mit Höhe 2 und eine mit Höhe 1. Zeichnen Sie für jede Art ein Beispiel!
- (c) Binärbäume zeichnen sich dadurch aus, dass jeder Knoten höchstens 2 Kinder hat.
 - i. Aus wievielen Knoten besteht ein Binärbaum der Höhe 5 mindestens?
 - ii. Aus wievielen Knoten besteht ein Binärbaum der Höhe 2 höchstens?

3. Adressierung in Bäumen (H)

Abbildung 1 zeigt zwei Binärbäume mit unterschiedlichen Namensschemata. Einmal sind die Knoten und einmal die Kanten benannt. Den Schemata gemein ist, dass sie lediglich die Verzweigungsmöglichkeiten berücksichtigen. Um einen Knoten eindeutig zu identifizieren, muss man den Pfad von der Wurzel bis zum gesuchten Knoten aufschreiben. Während die Wurzel bei benannten Knoten dementsprechend mit 1 eindeutig identifizierbar wird, ist der Pfad bei benannten Kanten ϵ (das leere Wort). In einem *vollständigen* Baum haben die Wurzel und jeder innere Knoten die maximale Anzahl Kinder.

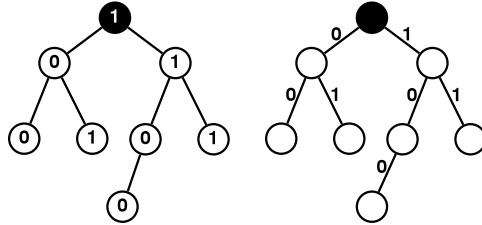


Abbildung 1: Links ein Baum mit benannten Knoten, rechts ein Baum mit benannten Kanten

- Wieviele Blätter hat jeder der Bäume im Beispiel?
- Wie lauten in beiden Beispielen die Pfade zu den Knoten mit Abstand 3?
- Aus wievielen Knoten besteht ein vollständiger Binärbaum der Höhe n ?
- Kann man aus dem Pfad "11" ablesen ob es sich um einen inneren Knoten oder ein Blatt handelt? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Schreiben Sie analog zum hier behandelten Beispiel mit benannten Kanten einen Pfad für einen beliebigen Knoten mit Abstand 8 in einem Binärbaum auf!
- Was haben die Pfade aller Nachfahren eines Knotens mit Abstand 8 gemein?
- In einem vollständigen Binärbaum der Höhe 16 mit benannten Kanten gibt es ein Blatt, das mit dem Pfad 1100000010101000 adressiert wird. Interpretieren Sie diesen Pfad als Zahl im Binärsystem und wandeln Sie diese um in:
 - eine Dezimalzahl,
 - eine Hexadezimalzahl und
 - ein Tupel aus zwei Dezimalzahlen wobei jede Dezimalzahl eine Hälfte des Pfads darstellt.