



Leibniz-Rechenzentrum
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

The background of the slide is a photograph of a modern, multi-story building with a glass and metal facade, partially obscured by a blue overlay. The building has several windows and a prominent vertical structure on the right side. The sky is overcast with some clouds.

Kapitel 8: Asymmetrische und hybride Kryptosysteme

- Asymmetrische Kryptosysteme
 - RSA
 - Sicherheit von RSA
- Schlüssellängen und Schlüsselsicherheit
- Hybride Kryptosysteme
- Elektronische Signatur

- Jeder Partner besitzt Schlüsselpaar aus
 - persönlichem, geheim zu haltenden Schlüssel (private key)
(wird NIE übertragen)
 - und öffentlich bekannt zu gebenden Schlüssel (public key)
(kann über unsichere und öffentliche Kanäle übertragen werden)
- Protokoll:
 1. Alice und Bob erzeugen sich Schlüsselpaare: (k_e^A, k_d^A) (k_e^B, k_d^B)
 2. Öffentliche Schlüssel (k_e^A, k_e^B) werden geeignet öffentlich gemacht
 3. Alice will m an Bob senden; dazu benutzt sie Bobs öffentlichen Schlüssel
$$c = e(m, k_e^B)$$
 4. Bob entschlüsselt die Nachricht mit seinem privaten Schlüssel:
$$m = d(c, k_d^b) = d(e(m, k_e^b), k_d^b)$$
- Beispiele: RSA, DSA, ElGamal, ...

Zielsetzung



- Effizienz / Performanz:
 - Schlüsselpaare sollen „einfach“ zu erzeugen sein.
 - Ver- und Entschlüsselung soll „schnell“ ablaufen.
- Veröffentlichung von k_e darf keine Risiken mit sich bringen
- Privater Schlüssel k_d darf nicht „einfach“ aus k_e ableitbar sein
 - D.h. Funktion f mit $f(k_d) = k_e$ soll nicht umkehrbar sein („Einwegfunktion“)

- Einsatz zur **Verschlüsselung**:
 - Alice schickt Nachricht m mit Bobs Public Key verschlüsselt an Bob
 - Bob entschlüsselt den empfangenen Chiffretext mit seinem privaten Schlüssel

- Einsatz zur **elektronischen Signatur**:
 - Alice verschlüsselt ein Dokument mit ihrem privaten Schlüssel
 - Bob entschlüsselt das Dokument mit Alices öffentlichem Schlüssel

RSA



- Benannt nach den Erfindern: Rivest, Shamir, Adleman (1978)
- Sicherheit basiert auf dem **Faktorisierungsproblem**:
 - Geg. zwei große Primzahlen p und q (z.B. 200 Dezimalstellen):
 - $n=pq$ ist auch für große Zahlen einfach zu berechnen,
 - aber für gegebenes n ist dessen Primfaktorzerlegung sehr aufwendig
- Erfüllt alle Anforderungen an asymmetrisches Kryptosystem
- 1983 (nur) in USA patentiert (im Jahr 2000 ausgelaufen)
- Große Verbreitung, verwendet in:
 - TLS (Transport Layer Security)
 - PEM (Privacy Enhanced Mail)
 - PGP (Pretty Good Privacy)
 - GnuPG (GNU Privacy Guard)
 - SSH
 -

Überblick über den Ablauf



- Erzeugung eines Schlüsselpaars
- Verschlüsselung
- Entschlüsselung

Erzeugung eines Schlüsselpaars

- Randomisierte Wahl von zwei ähnlich großen, unterschiedlichen Primzahlen, p und q
- $n = pq$ ist sog. RSA-Modul
- Euler'sche Phi-Funktion gibt an, wie viele positive ganze Zahlen zu n teilerfremd sind: $\Phi(n) = (p - 1)(q - 1)$
- Wähle teilerfremde Zahl e mit $1 < e < \Phi(n)$
d.h. der größte gemeinsame Nenner von e und $\Phi(n) = 1$
 - Für e wird häufig 65537 gewählt: Je kleiner e ist, desto effizienter ist die Verschlüsselung, aber bei sehr kleinen e sind Angriffe bekannt.
 - Der öffentliche Schlüssel besteht aus dem RSA-Modul n und dem Verschlüsselungsexponenten e .
- Bestimme Zahl d als multiplikativ Inverse von e bezüglich $\Phi(n)$
$$d = e^{-1} \bmod \Phi(n)$$
 - Berechnung z.B. über den erweiterten Euklidischen Algorithmus
 - n und d bilden den privaten Schlüssel; d muss geheim gehalten werden

Ver- und Entschlüsselung

- Alice kommuniziert ihren öffentlichen Schlüssel (n,e) geeignet an Bob (Ziel hier: Authentizität von Alice, nicht Vertraulichkeit!)

- Bob möchte Nachricht M verschlüsselt an Alice übertragen:
 - Nachricht M wird als Integer-Zahl m aufgefasst, mit $0 < m < n$
d.h. Nachricht m muss kleiner sein als das RSA-Modul n

 - Bob berechnet Ciphertext $c = m^e \pmod{n}$

 - Bob schickt c an Alice

- Alice möchte Ciphertext c entschlüsseln
 - Alice berechnet hierzu $m = c^d \pmod{n}$
 - Aus Integer-Zahl m kann Nachricht M rekonstruiert werden.

Nomenklatur für kryptologische Verfahren



- Für Verschlüsselungsverfahren wird künftig die folgende Notation verwendet:

A_p	Öffentlicher (public) Schlüssel von A
A_s	Geheimer (secret) Schlüssel von A
$A_p\{m\}$	Verschlüsselung der Nachricht m mit dem öffentlichen Schlüssel von A
$A_s\{m\}$ oder $A\{m\}$	Von A erstellte digitale Signatur von m
$S[m]$	Verschlüsselung von m mit dem symmetrischen Schlüssel S

Sicherheit / mögliche Angriffe

1. Brute force:

- ❑ Ausprobieren aller möglichen Schlüssel
- ❑ Entspricht Zerlegung von n in die Faktoren p und q
- ❑ Dauert bei großen p und q mit heutiger Technik hoffnungslos lange

2. Chosen-Ciphertext-Angriff (Davida 1982):

- ❑ Angreifer möchte Ciphertext c entschlüsseln, also $m = c^d \pmod{n}$ berechnen
- ❑ Angreifer kann einen Ciphertext c' vorgeben und bekommt m' geliefert
- ❑ Angreifer wählt $c' = s^e c \pmod{n}$, mit Zufallszahl s
- ❑ Aus der Antwort $m' = c'^d \pmod{n}$ kann $m = m' s^{-1}$ rekonstruiert werden.

Sicherheit / mögliche Angriffe

3. **Timing-Angriff:** [Kocher 1995]

- ❑ Überwachung der Laufzeit von Entschlüsselungsoperationen
- ❑ Über Laufzeitunterschiede kann privater Schlüssel ermittelt werden
- ❑ Gegenmaßnahme: Blinding; Alice berechnet statt $c^d \pmod n$ mit einmaliger Zufallszahl r

$$(r^e c)^d \pmod n = r c^d \pmod n$$

und multipliziert das Ergebnis mit der Inversen von r .

- ❑ Folge: Dauer der Entschlüsselungsoperationen hängt nicht mehr direkt nur von c ab, Timing-Angriff scheitert.

4. **Angriffe auf Signaturen** (vgl. spätere Folien zur dig. Signatur)

- ❑ Multiplikativität von RSA $m^e r^e = (mr)^e$ erlaubt die Konstruktion gültiger Signaturen für ein Dokument, das aus korrekt signierten Teildokumenten zusammengesetzt ist.

Mathematische Angriffe

- Mathematische Angriffe lassen sich auf Faktorisierung zurückführen
- Schnellster bekannter Algorithmus: **General Number Field Sieve (GNFS)**, vgl. [Silv 01]
 - Laufzeitkomplexität $L(N) = e^{(c+o(1)) \cdot \sqrt[3]{\log(N)} \cdot \sqrt[3]{\log(\log(N))^2}}$
 - Speicherplatzkomplexität $\sqrt{L(N)}$

- Angriffe werden ggf. einfacher:
 - Wenn die Anzahlen der Ziffern von p und q große Unterschiede aufweisen (z.B. $|p| = 10$ und $|q| = 120$)
 - Falls $d < 1/3 \cdot \sqrt[4]{n}$, kann d leicht berechnet werden
 - Die ersten m/4 Ziffern oder die letzten m/4 Ziffern von p oder q sind bekannt.

- Vgl. [Boneh 1999]: Twenty Years of attacks on the RSA cryptosystem, <http://crypto.stanford.edu/~dabo/pubs/papers/RSA-survey.pdf>

- Asymmetrische Kryptosysteme

 - RSA

 - Sicherheit von RSA

- Schlüssellängen und Schlüsselsicherheit

- Hybride Kryptosysteme

- Elektronische Signatur

Wie lang muss ein sicherer Schlüssel sein?

Einflussfaktoren



- Symmetrisches oder asymmetrisches Verfahren ?
- Algorithmus

- PC-/softwarebasierter Angriff, oder
- Angriff mit dedizierter Hardware
 - Angriff mit integrierter Schaltung (ASIC, application specific integrated circuit)
 - Angriff mit programmierbarer integrierter Schaltung (FPGA, field programmable gate array)
 - GPGPU (General-purpose computing on graphics processing units)

- Kosten und Ressourcenbedarf

Angriffe auf symmetrische Kryptosysteme

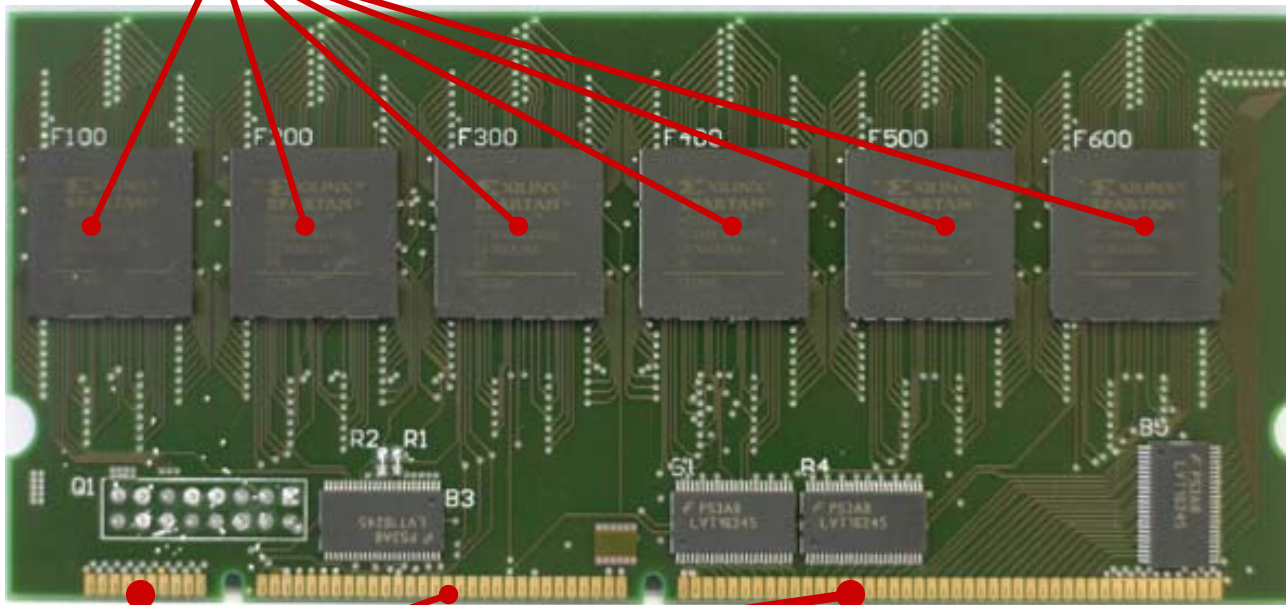
- Brute-Force Angriff
 - Durchsuchen des gesamten Schlüsselraums
 - Im Mittel ist halber Schlüsselraum zu durchsuchen
- Referenzzahlen; Größenordnungen (gerundet)

	Größenordnung
Sekunden in einem Jahr	$3 * 10^7$
Alter des Universums in Sekunden	$4 * 10^{17}$
Schlüsselraum bei 64 Bit Schlüssellänge	$2 * 10^{19}$
Masse des Mondes [kg]	$7 * 10^{22}$
Masse der Erde [kg]	$6 * 10^{24}$
Masse der Sonne [kg]	$2 * 10^{30}$
Schlüsselraum bei 128 Bit Schlüssellänge	$3 * 10^{38}$
Anzahl Elektronen im Universum	$10^{77} - 10^{79}$

PC versus FPGA basierter Angriff

- FPGA Implementierung Copacobana (www.copacobana.org)

6x Spartan 3 FPGA (xc3s1000, FT256 packaging)



Connection to backplane (64-bit data bus)

Quelle: www.copacobana.org

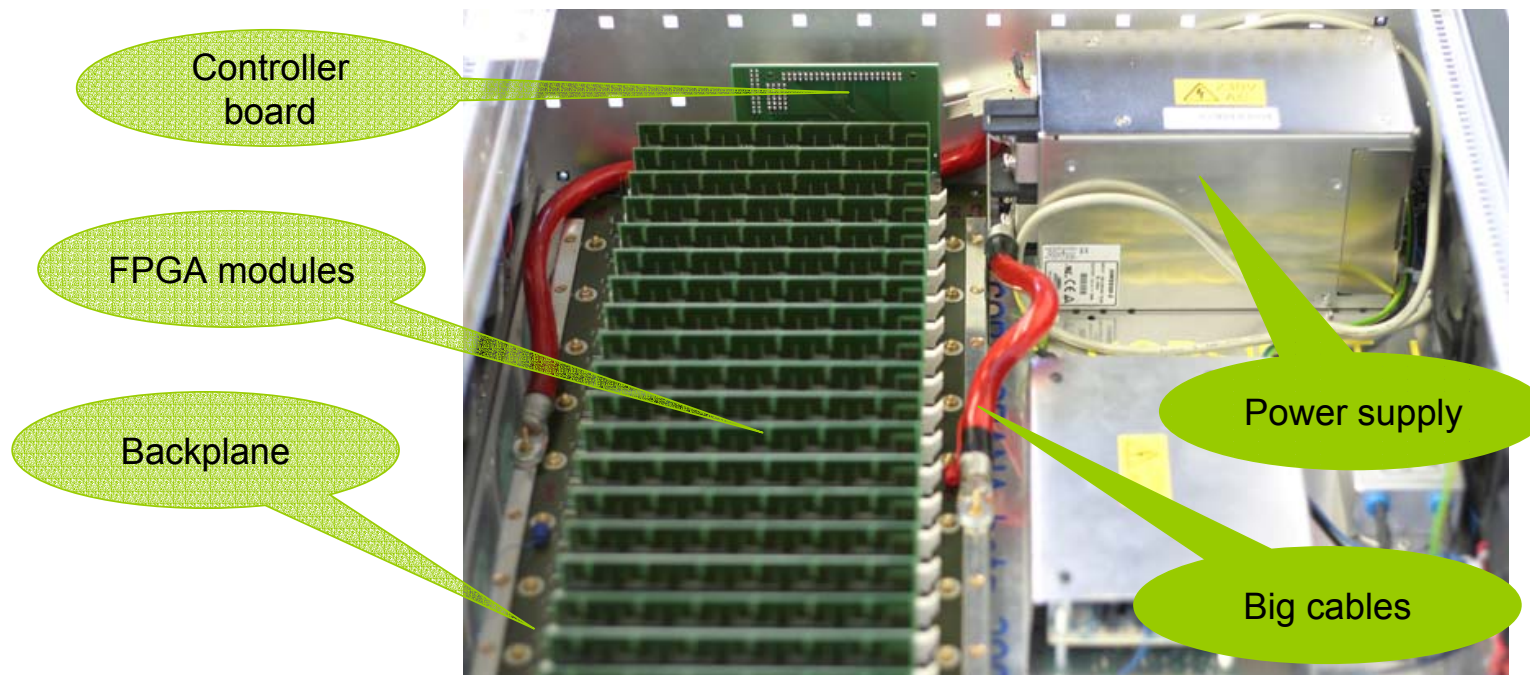
Copacobana



[Pelzl 2006]

Copacobana: Innenleben

- 20 Module pro Maschine mit 120 FPGAs



[Pelzl 2006]

DES: Brute Force Angriff (Stand 2007)

- Pentium 4; 3 GHz: ca. $2 * 10^6$ Schlüssel/s
- Copacobana;
 - 2006: $4,793 * 10^{10}$ Schlüssel/s
 - 2007: $6,415 * 10^{10}$ Schlüssel/s
 - [2008: $6,528 * 10^{10}$ Schlüssel/s]

Schlüssellänge [Bit]	#Schlüssel	durchschnittliche Zeit [s]		
		2006	2007	Pentium PC
40	$1,1 * 10^{12}$ ($5,5 * 10^{11}$)	11,5	8,6	274.878 3,18 d
56	$7,2 * 10^{16}$	751.680 8,7 d	561.600 6,5 d	$1,8 * 10^{10}$ 571 Jahre
128	$3,4 * 10^{38}$	$3,55 * 10^{27}$ $1,12 * 10^{20}$ J.	$2,65 * 10^{27}$ $8,4 * 10^{19}$ J	$8,5 * 10^{31}$ $2,6 * 10^{24}$ J.

Kosten (Stand 2006)



- Ziel: DES im Mittel in 8,7 Tagen brechen
- Dafür rd. 24.000 Pentium (je 150 €) erforderlich: 3,6 Mio €
Stromverbrauch: ca. 60 Watt pro CPU (~1,4 MW gesamt)
- Copacobana: 9.000 €
Stromverbrauch: 600 Watt (insgesamt)

RSA Schlüssellängen

- RSA Challenge: Belohnung für das Brechen von RSA Schlüsseln, z.B. durch Faktorisierung

Dezimalstellen	Bits	Datum	Aufwand	Algorithmus
100	332	April 1991	7 Mips Jahre	Quadratisches Sieb
110	365	April 1992	75 Mips J.	
120	398	Juni 1993	830 Mips J.	
129	428	April 1994	5000 Mips J.	
130	431	April 1996	1000 Mips J.	General Number Field Sieve (GNFS)
140	465	Februar 1999	2000 Mips J.	
155	512	August 1999	8000 Mips J.	
160	530	April 2003	k.A.	GNFS(Lattice Sieve)
174	576	Dez. 2003	k.A.	GNFS(Lattice/Line Sieve)
193	640	Nov. 2005	30 2,2-GHz-Opteron-Jahre	GNFS

RSA Schlüssellängen (Forts.)

- RSA Challenge wurde 2007 eingestellt
 - rund \$30.000 Preisgeld ausbezahlt
- RSA-768 wurde 2009 von Kleinjung et al. „geknackt“
 - hätte \$50.000 Preisgeld eingebracht

Dezimalstellen	Bits	Datum	Aufwand	Algorithmus
232	768	Dez. 2009	1/2 Jahr 80 CPUs (Vorauswahl)	GNFS

- Bereits 2007 wurde von Kleinjung et al. die 1039. Mersenne-Zahl (1039-Bit-Zahl) faktorisiert
 - war allerdings nicht Bestandteil der RSA Challenge

Symmetrisch vs. Asymmetrisch

- Verschiedene Institutionen geben Vergleiche heraus
Bits of Security (äquiv. Schlüssellänge symmetrischer Verfahren)
 - **NIST** (National Institute of Standards and Technology) 2007:

Bits of Security	80	112	128	192	256
Modullänge (pq)	1024	2048	3072	7680	15360

- **NESSIE** (New European Schemes for Signatures, Integrity and Encryption) (2003)

Bits of Security	56	64	80	112	128	160
Modullänge (pq)	512	768	1536	4096	6000	10000

BSI Empfehlungen für Schlüssellängen



- BSI-TR-02102-1; Technische Richtlinie vom 24.03.2021:
<https://www.bsi.bund.de/SharedDocs/Downloads/DE/BSI/Publikationen/TechnischeRichtlinien/TR02102/BSI-TR-02102.pdf> Richtet sich an Entwickler die ab 2020 neue Systeme planen
 - TR wird jährlich überprüft und ggf. angepasst
- Bis 2022 Sicherheitsniveau von 100 Bit danach mind. 120 Bit

Symmetrische Verfahren		asymmetrische Verfahren		
Ideale Blockchiffre	Idealer MAC	RSA	DSA/DLIES	ECDSA/ECIES
100	100	1900	1900	200
120	120	2800	2800	240

Tabelle 1.2.: Empfohlene Schlüssellängen für verschiedene kryptographische Verfahren

Blockchiffre	MAC	RSA	DH F_p	DH (elliptische Kurve)	ECDSA
128	128	2000 ^a	2000 ^a	250	250

^a Für einen Einsatzzeitraum über das Jahr 2022 hinaus wird durch die vorliegende Richtlinie empfohlen, eine Schlüssellänge von 3000 Bit zu nutzen, um ein vergleichbares Sicherheitsniveau für alle asymmetrischen Verfahren zu erreichen. Die Eignungsdauern von RSA-, DLIES- und DSA-Schlüsseln mit einer Schlüssellänge unter 3000 Bit werden nicht weiter verlängert. Eine Schlüssellänge von ≥ 3000 Bit wird damit ab dem Jahr 2023 für kryptographische Implementierungen verbindlich werden, die zu der vorliegenden Richtlinie konform sein sollen. Jede Schlüssellänge von ≥ 2000 ist aber bis Ende 2022 konform zu der vorliegenden Technischen Richtlinie. Als Übergangsregelung ist außerdem die Nutzung von RSA-Schlüsseln mit einer Länge ab 2000 Bit bis Ende 2023 ebenfalls noch konform. Genauere Informationen finden sich in Bemerkungen 4 und 5 in Kapitel 3.

[https://www.bsi.bund.de/SharedDocs/Downloads/DE/BSI/Publikationen/TechnischeRichtlinien/TR02102/BSI-TR-02102.pdf?__blob=publicationFile]

■ Vergleich der verschiedenen Empfehlungen:

<https://www.keylength.com/>

In most cryptographic functions, the key length is an important security parameter. Both academic and private organizations provide recommendations and mathematical formulas to approximate the minimum key size requirement for security. Despite the availability of these publications, choosing an appropriate key size to protect your system from attacks remains a headache as you need to read and understand all these papers.

This web site implements mathematical formulas and summarizes reports from well-known organizations allowing you to quickly evaluate the minimum security requirements for your system. You can also easily compare all these techniques and find the appropriate key length for your desired level of protection. The lengths provided here are designed to resist mathematic attacks; they do not take algorithmic attacks, hardware flaws, etc. into account.



Choose a Method

- Lenstra and Verheul Equations (2000)
- Lenstra Updated Equations (2004)
- ECRYPT II Recommendations (2012)
- NIST Recommendations (2016)
- ANSSI Recommendations (2014)
- IAD-NSA CNSA Suite (2016)
- Network Working Group RFC3766 (2004)
- BSI Recommendations (2017)

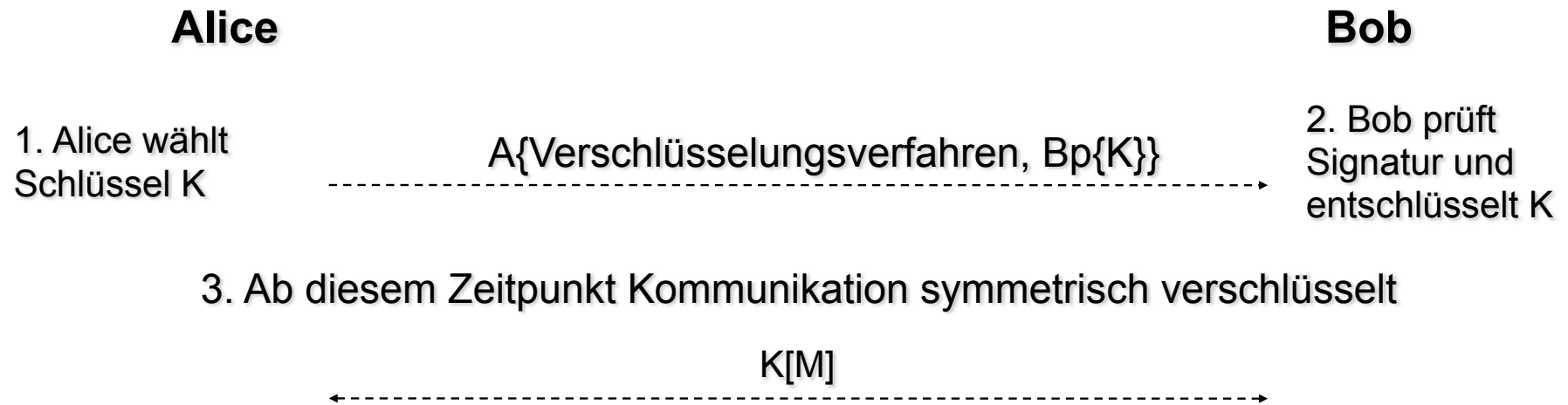
Compare all Methods

- Asymmetrische Kryptosysteme
 - RSA
 - Sicherheit von RSA
- Schlüssellängen und Schlüsselsicherheit
- **Hybride Kryptosysteme**
- Elektronische Signatur

Hybride Kryptosysteme



- Vereinen Vorteile von symmetrischen und asymmetrischen Verfahren
- Asymmetrisches Verfahren zum Schlüsselaustausch
- Symmetrisches Verfahren zur Kommunikationsverschlüsselung

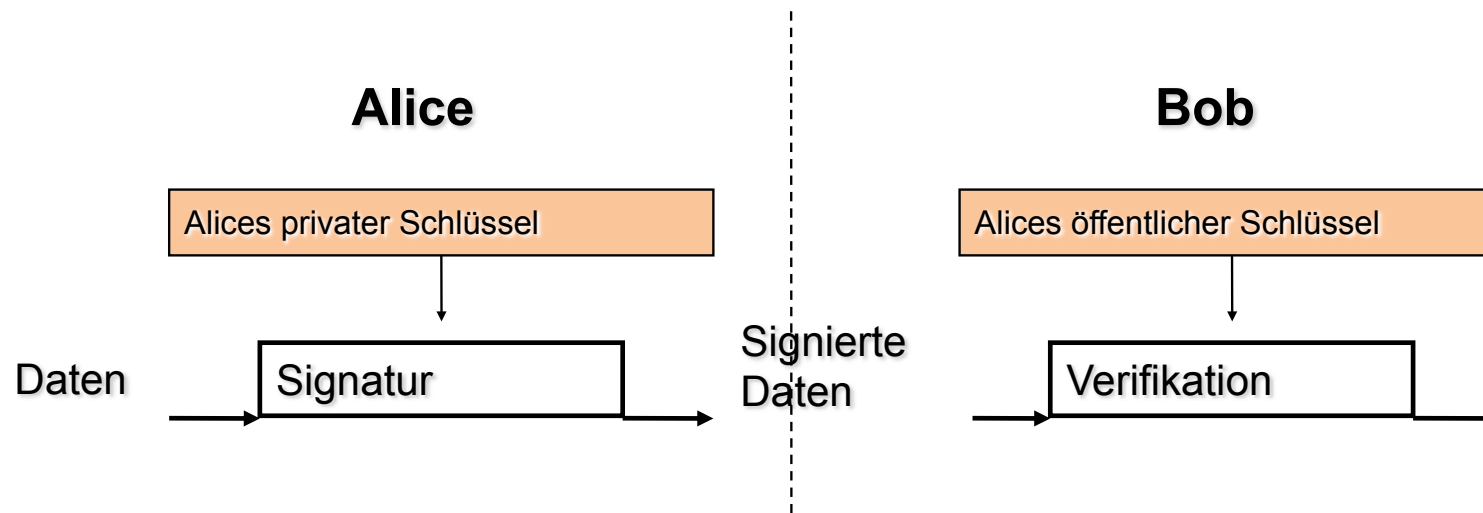


- Beispiele für hybride Verfahren: SSL/TLS, PGP, SSH, ...
 - Oftmals neuer Schlüssel pro Nachricht oder Zeiteinheit, aus K abgeleitet

- Asymmetrische Kryptosysteme
 - RSA
 - Sicherheit von RSA
- Schlüssellängen und Schlüsselsicherheit
- Hybride Kryptosysteme
- Elektronische Signatur

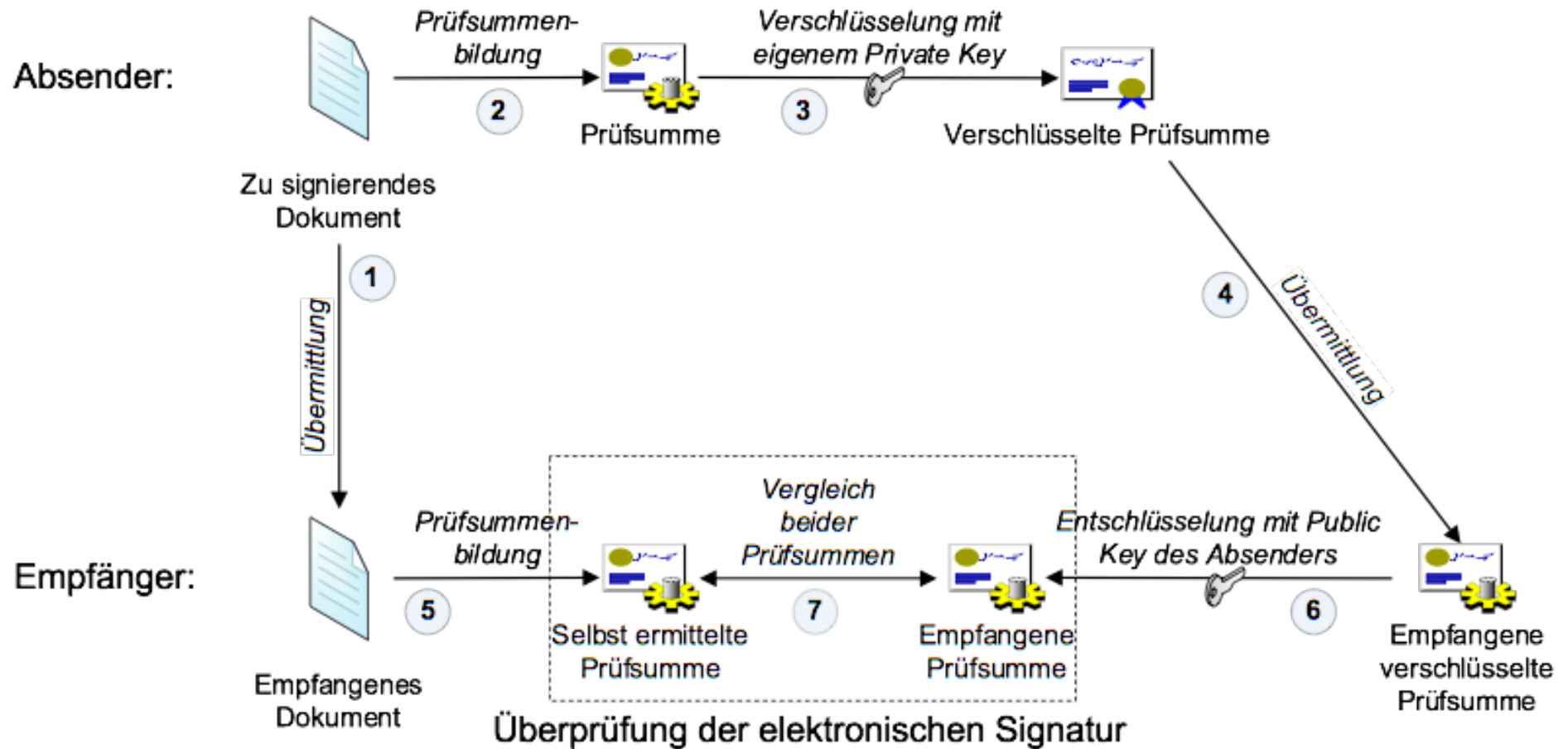
Elektronische Signatur

- Alice „signiert“ Daten mit ihrem privaten Schlüssel
- Jeder kann die Signatur mit Alices öffentlichem Schlüssel verifizieren



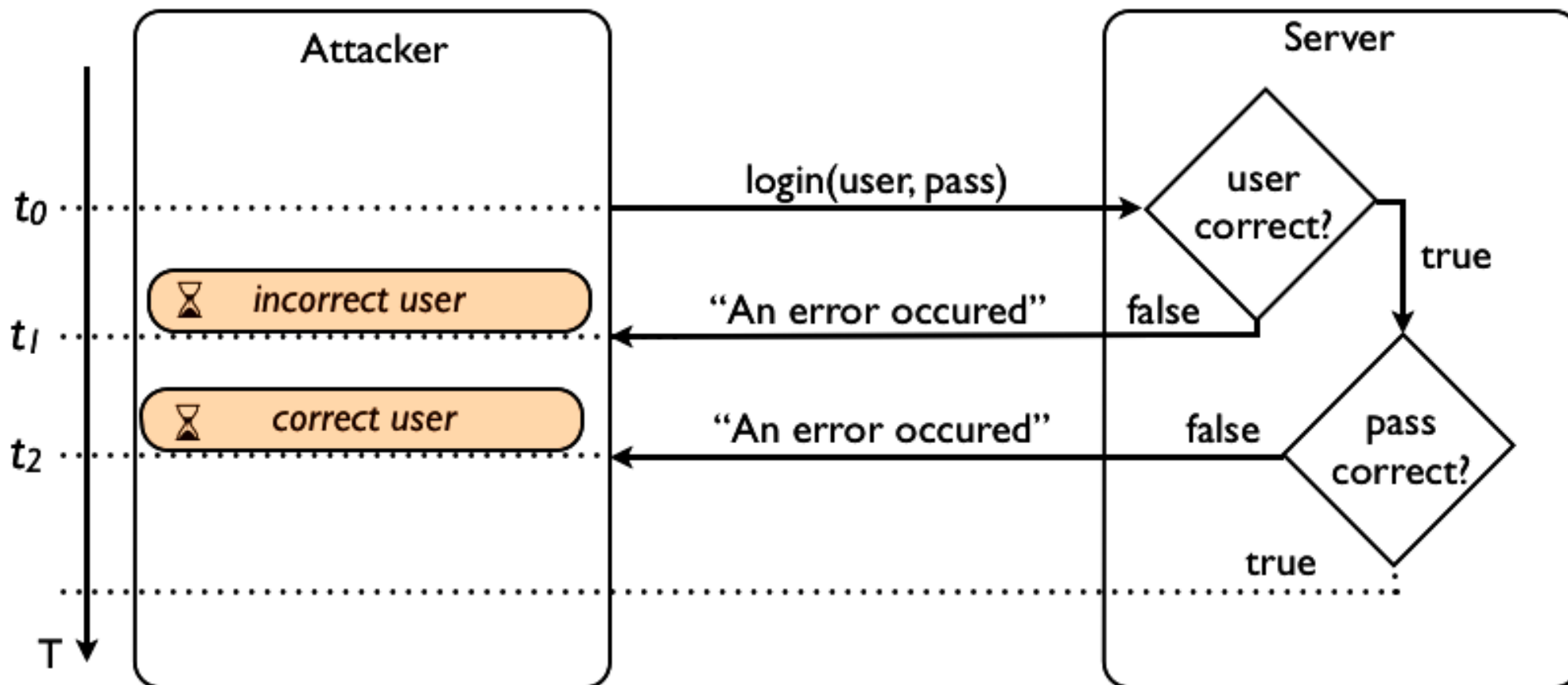
- Asymmetrische Verfahren sind im Vergleich sehr langsam
- Daher i.d.R. nicht Signatur der gesamten Daten
- **Lediglich kryptographischer Hash-Wert der Daten wird signiert** (digitaler Fingerabdruck der Daten)

Signatur und deren Verifikation



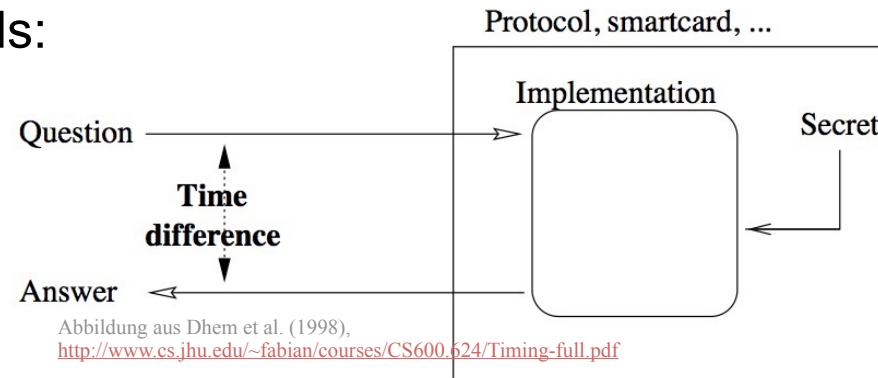
Timing-Angriffe

- Zunächst am Beispiel Webanwendungen:

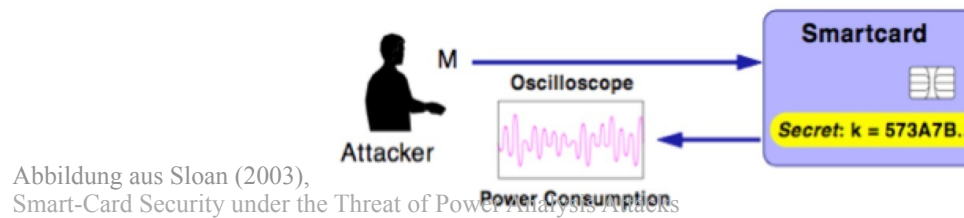


Timing-Angriffe

■ Auf RSA-Smartcards:



- Different power consumption when operating on logical ones vs. logical zeroes.



Analogie zur Unterschrift

- Zentrale Anforderungen an die (analoge) Unterschrift:
 1. Perpetuierungsfunktion: Dokument und Unterschrift sind dauerhaft.
 2. Echtheitsfunktion: Die Unterschrift ist authentisch.
 3. Die Unterschrift kann nicht wiederverwendet werden.
 4. Abschlussfunktion: Unterschrift ist räumlicher Abschluss des Dokuments; dieses kann später nicht verändert werden.
 5. Beweisfunktion: Unterzeichner kann seine Unterschrift später nicht leugnen.
- Weitere Anforderungen?
- Bei der Unterschrift auf Papier ist keine dieser Anforderungen vollständig erfüllt! Trotzdem wird die Unterschrift im Rechtsverkehr akzeptiert. Ihre Funktion wird durch Rahmenbedingungen gesichert.

Erfüllung oder Anforderungen?

1. Perpetuierungsfunktion: Fälschungssicher und dauerhaft
 2. Echtheitsfunktion: Authentizität sichergestellt
 3. **Wiederverwendbarkeit: Wie gewünscht nicht gegeben**
 4. Abschlussfunktion: Nicht veränderbar
 5. Beweisfunktion: Unterschrift ist nicht zu leugnen
-
1. Solange privater Schlüssel geheim gehalten wird.
 2. Abhängig von zweifelsfreier Zuordnung des Schlüsselpaares zu einer Identität (Zertifizierung, CA)
 3. Digitale Signatur „beinhaltet“ den Dateninhalt
 4. vgl. 3.
 5. Jeder kann Signatur bzw. Echtheit mit öffentlichem Schlüssel des Unterzeichners verifizieren.